Zusammenhang Rektaszension (α) und Ekliptikale Länge (λ)

<u>Allgemein</u>

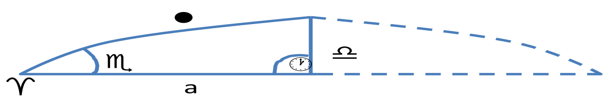
Sowohl im Äquatorialsystem als auch im Ekliptiksystem ist eine Position durch je 2 Koordinaten bestimmt, nämlich Rektaszension α (am Äquator gemessen) und Deklination δ (auf dem Längenkreis gemessen) bzw. ekliptikale Länge λ (auf der Ekliptik gemessen) und ekliptikaler Breite β (Abstand von der Ekliptik). Eine eindeutige Beziehung zwischen α und λ setzt voraus, dass über δ bzw. β eine Verfügung getroffen wird. Besonders interessant ist hier β = 0 für Punkte, die direkt auf der Ekliptik liegen: ☉, Aszendent, Deszendent, aufsteigender ☊, absteigender ☊, Zeichengrenzen, evtl. Häuserspitzen (abhängig vom Häusersystem), usw.

Die Abhängigkeit λ (α, β = 0) lässt sich dann aus folgendem sphärischen Dreieck berechnen.
Hier gilt (Math.Rep., S. 149, Fall 4):

$$\tan\lambda = \frac{\tan a}{\cos \in}$$

============

$$\tan\delta = \sin a \,.\, \tan \in$$



Wegen cos ε < 1 ist im 1. Quadranten stets tan λ > tan a, daher auch λ - a > 0.

An den Quadrantengrenzen (α = 90°, 180°, 270°, 360°) ist jeweils λ = a und daher λ - a = 0.

In der Nähe von 45° liegen also Extreme von (λ - a).

Da dort sowohl tan als auch arctan monotone Funktionen sind, kann man statt

$\frac{d(\lambda - a)}{da}$ = 0 auch $d\left(\frac{\tan\lambda}{da}\right) - 1 = 0$ setzen, oder

1. Variante:

$$\frac{d(arctan\frac{\tan a}{\cos \in})}{da} = 1$$

$$\frac{1}{1+(\frac{\tan a}{\cos \quad \in})^2} \cdot \frac{1}{\cos \in} \cdot \frac{1}{cos^2 \, a} \; = 1$$

$$\frac{\cos \in}{cos^2 \in . cos^2 a + sin^2 a} = 1$$

$$cos \in = cos^2 \in . cos^2 a + 1 - cos^2 a$$

$$cos^2 a = \frac{1 - cos \in}{1 - cos^2 \in} = \frac{1}{1 + cos \in}$$

$sin^2 a = \frac{cos\in}{1+cos\in}$ Division von $sin^2 a \, durch \, cos^2 a$ ergibt dann

$\underline{\underline{\mathbf{\tan \boldsymbol{a} = \pm\sqrt{\boldsymbol{cos} \in}}}}$

Oder **2. Variante:**

$$\frac{d(\lambda - a)}{d(\tan a)} = 0$$

$$\frac{d\left[arctan\left(\frac{\tan a}{\cos \in}\right)\right]}{d\left(\frac{\tan a}{\cos \in}\right)} . \frac{d\left(\frac{\tan a}{cos \;\; \in}\right)}{d(\tan a)} - \frac{da}{d(\tan a)} = 0$$

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{\tan a}{\cos \in}\right)^2} \cdot \frac{1}{\cos \in} - cos^2 a = \;\; 0$$

$$\left[1 + \left(\frac{\tan a}{\cos \in}\right)^2\right] . cos \in . cos^2 a = 1$$

.

.

$\underline{\underline{\mathbf{\tan \boldsymbol{a} = \; \pm\sqrt{\boldsymbol{cos} \in}}}}$

3. Variante: Kürzer ist

$$\frac{d\big(tan(\,\lambda - a)\big)}{d\tan a}$$

$$tan(\lambda - a) = \frac{tan\ \ \lambda - \tan a}{1 + \tan\lambda\ .\tan a} = \frac{\frac{\tan a}{\cos\ \in} - \tan a}{1 + \frac{tan^2\ a}{\cos \in}} = \frac{\tan a(1 - cos\ \in)}{\cos \in + tan^2\ \ a}$$

0 =$\frac{d\big(tan(\lambda - a)\big)}{d\tan a} = (1 - cos\ \in)\ .\,[(\cos \in + tan^2\ a)1 - 2\ tan^2\ a]$

$\cos \in - tan^2\ a = 0$

$\underline{\underline{\boldsymbol{tan\ a = \pm\sqrt{cos\ \ \in}}}}$

Dieses Maximum liegt dann bei:

$$\boldsymbol{tan(\lambda - a)max = \frac{\pm\sqrt{\cos \in}\ (1 - \cos \in)}{cos\ \ \in\ + cos\ \ \in} = \pm\frac{1}{2}\ .\Big(\frac{1}{\sqrt{cos\ \ \in}} - \sqrt{cos\ \ \in}\Big)}$$

==

Numerische Werte dazu (J 2000,0) :

∈= 23°26’21,4“ = 23,439278° =

cos ∈ =0,9174822

$\sqrt{\cos \in} = 0{,}9578529 = \tan 43{,}766772''$

$\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{\cos \in}} - \sqrt{\cos\ \ \in}\Big) = 0{,}0430744 = \tan 2{,}4664557°$

Fixpunkte der Kurve λ(a):

Wegen $\tan(\lambda - a) = \frac{\tan a(1-\cos\in)}{\cos \in + tan^2\ a} = \frac{1-\cos\in}{\frac{1}{\tan a} + \cos \in + \tan a}$

hat λ(a) folgende Fixpunkte (unabhängig von $\in$):

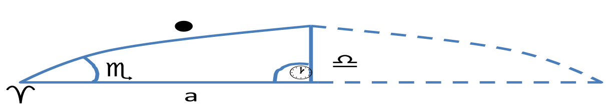
$$TangensPeriode = 180° \begin{cases} 1.\ \ \tan a = 0: \\ \mathrm{a} = 0°,\ \lambda = 0° \\ \mathrm{a} = 180°,\ \lambda = 180° \\ \mathrm{a} = 360°,\ \lambda = 360° \\ 2.\ \ \tan a = \infty \\ a = 90°,\ \lambda = 90° \\ a = 270°,\ \lambda = 270° \end{cases}$$

Dazwischen liegen bei 45° und bei 135° abwechselnd positive und negative Extreme von (λ - a) je nach dem Vorzeichen von tan a. Diagramm siehe unten.

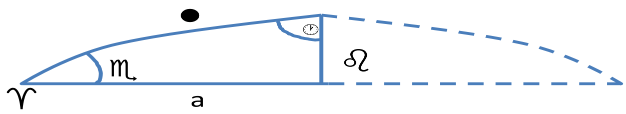
Umkehrschluss λ→a:

Für a(λ) gilt das gleiche Diagramm wie für λ(a). Es wird nur die Beschriftung der beiden Achsen vertauscht, die Kurve λ(a) wird nicht gespiegelt! Auch in der Formel werden nur a und λ vertauscht.

Statt des Dreiecks:



Gilt nun das Dreieck:



und berechnet wird nur a unter der Bedingung β = 0. Nur gibt es hier nicht so viele interessante Punkte auf dem Äquator wie auf der Ekliptik,

<u>Flacher Verlauf der Kurve λ - a, abhängig von a</u>

$$\text{Für } \cos \in = \cos 23{,}439278 = 0{,}9174822 \text{ gilt:}$$

a	arctan$\left(\frac{\tan a}{\cos \in}\right)$	λ	λ-a
0°	0°	0°	0°
10°	10,878788°	10,878788°	0,878788°
20°	21,638501°	21,638501°	1,638501°
30°	32,181257°	32,181257°	2,181257°
40°	42,445032°	42,445032°	2,445032°
50°	52,408803°	52,408803°	2,408803°
60°	62,089448°	62,089448°	2,089448°
70°	71,533970°	71,533970°	1,533970°
80°	80,810485°	80,810485°	0,810485°
90°	90°	90°	0°
100°	-80,810485°	99,189485°	-0,810485°
110°	-71,533970°	108,466030°	-1,533970°
120°	-62,089448°	117,910552°	-2,089448°

λ-a ist für kleine $\in$ *etwa* $\sim \in^2$, ebenso 45° - a(max)

ϵ	cos ϵ	a(max)	45°-a(max)	tan(λ-a)max	(λ-a)max
10°	0,98481	44,7807°	0,2193°	0,007655°	0,43856°
20°	0,93969	44,1092°	0,8908°	0,03106°	1,78168°
30°	0,86603	42,9414°	2,0586°	0,07198°	4,11719°
40°	0,76604	41,1937°	3,8063°	0,13365°	7,61260°

Für $\in \gg$ 90° gilt: $\cos \in \approx 1 - \frac{\in^2}{2}$ $\quad \left[\in \textit{ im Bogenmass}\, , 1° \triangleq \frac{\pi}{180}\right]$

$$\tan x \approx x - \frac{x^3}{x}$$

$$\sqrt{1 \pm x} \;\approx 1 - \pm\frac{x}{2} \mp, \tan x \approx x + \frac{x^3}{3} \mp,\ \arctan x \approx x - \frac{x^3}{3} \pm$$

(Math. Formelsammlung, S. 415 …418)

$$\tan\big(a(max)\big) = \sqrt{\cos \in} \;\approx 1 - \frac{\in^2}{4}$$

$$\tan(45° - amax) = \frac{\tan 45° - \tan(amax)}{1 + \tan 45°\,.\tan(amax)} = \frac{1 - \sqrt{\cos \in}}{1 + \sqrt{\cos \in}} \;= \frac{1 - \sqrt{\cos \in}}{1 + \sqrt{\cos \in}}$$

$$\approx \frac{1 - \left(1 - \frac{\in^2}{4}\right)}{1 + \left(1 - \frac{\in^2}{4}\right)} \approx \frac{\in^2}{8}$$

$$\tan(\lambda - a)\max \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\cos \in}} - \sqrt{\cos \in}\right) \approx \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{\in^2}{4}\right) - \left(1 - \frac{\in^2}{4}\right)\right] = \frac{\in^2}{4}$$

also Versatz des Maximums gegen 45° ist etwa halb so gross wie das Maximum selbst.

Zusammenhang zwischen Rektaszension (α) und ekliptikaler Länge (λ)

Gibt man den Ort des Planeten vom Erdmittelpunkt aus gesehen in Bezug auf den Himmelsäquator an, dann erhält man die in der Astronomie allgemein üblichen Koordinaten Rektaszension und Deklination. Es sind alles Winkelfunktionen mit der Linie Erde/Planet.

Vereinfacht ausgedrückt:

- Deklination (δ) (Delta): ist der Abstand des Planeten vom Äquator. Manchmal wird der Begriff „wahre Deklination" des Planeten verwendet. Das ist jene, die der Planet tatsächlich hat und nicht jene der ☉ Deklination, wenn sie auf diesem Grad zu stehen kommt.
- Rektaszension (α) (alpha): sie wird am Äquator nach Westen gemessen, beginnend vom Frühlingspunkt (0°♈) und in Sternzeit (ST) Stunden, Minuten und Sekunden angegeben.
- Ekliptikale Länge (λ) (lambda): Ist der Winkel zwischen dem Frühlingspunkt und der Projektion der Linie Erde-Planet auf die Ekliptik: gemessen von 0° bis 360° in Richtung der Bewegung der Erde um die Sonne.
- Ekliptikale Breite (β) (beta): ist der Abstand des Planeten von der Ekliptik.
- Die geographische Position wird auf der Erde in geographischer Länge und Breite (nord, süd) gemessen.
- Delta (Δ): Die Entfernung von der Erde.

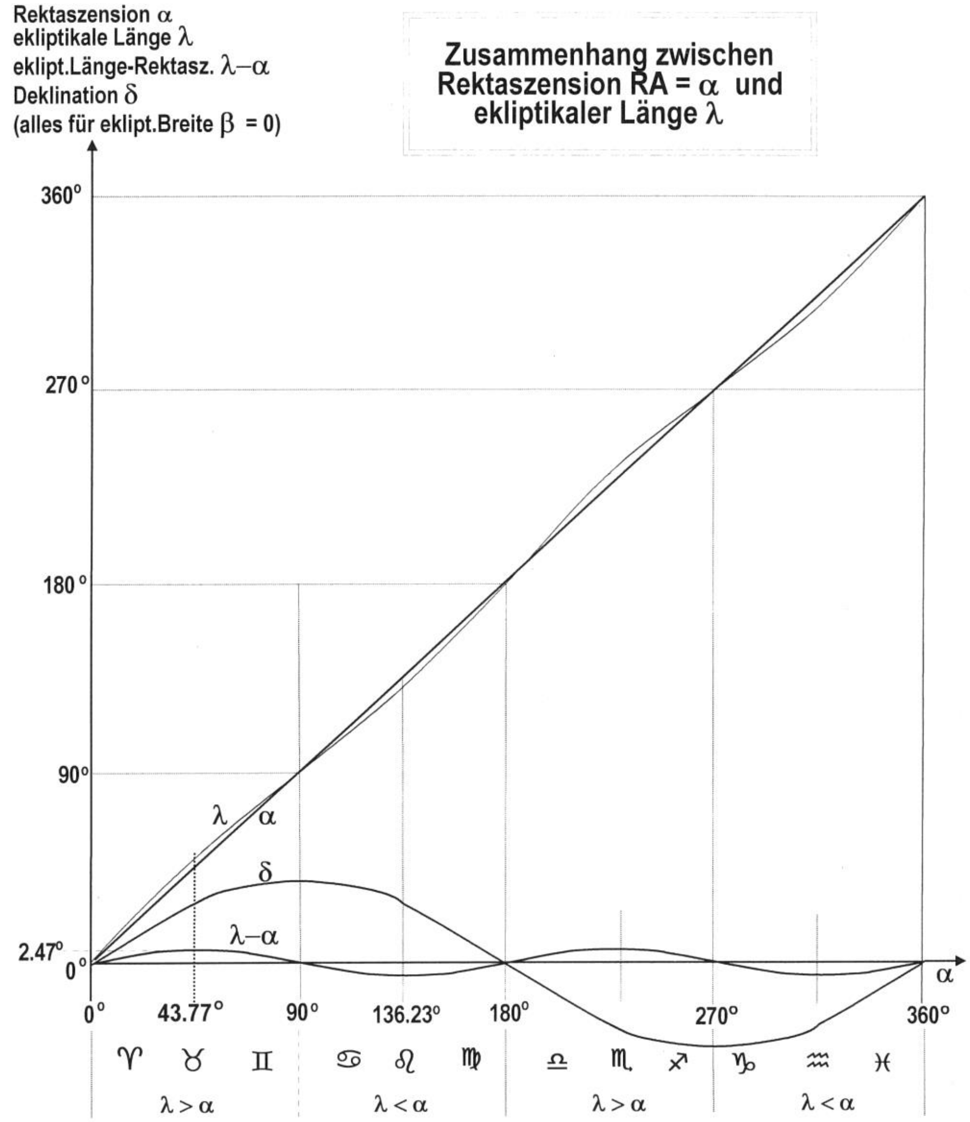
Die Deklination der ☉ (δ) ist bei 0° ♈ und 0° ♎ gleich Null. Ihre Maxima, derzeit 23° 26′ 18", d.i. die Schiefe der Ekliptik, sind bei 90° bzw. 270".

Die Differenz zwischen α und λ ist nicht immer gleich groß. Bei 0°, 90°, 180° und 270° ist die Differenz zwischen α und λ gleich Null.

Die maximale Differenz zwischen α und λ wird nicht bei den 45° Abschnitten erreicht, sondern die maximalen Plus-Abweichungen befinden sich bei 13°46′ ♉ (sowie ♏), d.h. λ ist hier größer als α, die größten Minus-Abweichungen liegen bei 16°14′ ♌ (sowie ♒), d.h. λ ist hier kleiner als α. Sie betragen etwa 2°28′ und betreffen eine Deklination von ca. 16° n/s.

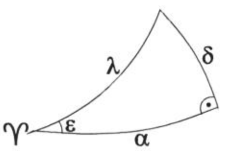
Eine Konjunktion in ekliptikaler Länge ist nicht gleichzeitig eine Konjunktion in Rektaszension. Wenn der 1. Planet in einem Quadranten und der 2. Planet im gegenüberliegenden Quadranten steht, so ist die Differenz beim Direktionsbogen zwischen ekliptikaler Länge und Rektaszension nicht sehr groß, wenn der 1. Planet jedoch in einem Quadranten steht und der 2. Planet im benachbarten Quadranten, kann die Differenz bis zu 2.5° betragen.

Zusammenhang zwischen Rektaszension RA = α und ekliptikaler Länge λ



Bei 0°, 90°, 180°, 360° sind α und λ gleich!

$\beta = 0°$



$\tan \lambda = \tan \alpha / \cos \varepsilon$

$\tan \delta = \tan \varepsilon \, . \, \sin \alpha$

Zeichnung nicht maßstäblich, aber die Zahlen entsprechen einer Ekliptikschiefe von 23.433° = 23°26'